PENERAPAN METODE SPEKTRAL PADA ALIRAN FLUIDA 1 DIMENSI

Farida Nurmala Sihotang
Sekolah Tinggi Teknologi Bandung
Jl. Soekarno Hatta No.378, Kb. Lega Bojongloa Kidul, Kota Bandung, Jawa Barat 40235
Email: farida@sttbandung.ac.id

Abstrak

Metode spektral merupakan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menerapkan transform Fourier. Penerapan transform Fourier mengubah suatu persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa sehingga lebih mudah untuk diselesaikan. Selain itu akan dicari analisis kestabilan linier persamaan difusi dengan menggunakan metode von Neumann. Dan diperoleh bahwa persamaan difusi stabil tanpa syarat. Pada jurnal ini metode spektral diterapkan guna menyelesaikan persamaan Burger dengan suku difusi.

Kata kunci : metode spektral, , persamaan Burger, transform fourier

Abstract

The Spectral method is a numerical method for solving partial differential equations by applying the Fourier transform. The application of the Fourier transform transforms a partial differential equation into an ordinary differential equation making it easier to accomplish. In addition, we will find a stability analysis of linear diffusion equations using von Neumann method. And it is found that the diffusion equation is stable unconditionally. In this paper the spectral method is applied to solve the Burger equation with the diffusion tribe.

Keywords : spectral method, Burger's equation, Fourier transform

V. PENDAHULUAN

Persamaan Burger dan persamaan Navier Stokes merupakan jenis persamaan diferensial yang cukup menarik untuk dibahas. Persamaan Burger untuk kasus 1 dimensi sedangkan persamaan Navier Stokes merupakan persamaan untuk kasus 2 dimensi. Kedua persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial se-hingga untuk menyelesaikannya perlu dilakukan pendekatan numerik.

Pada tugas akhir ini metode numerik yang akan digunakan untuk menyele-saikan persamaan diferensial tersebut yaitu metode spektral. Metode spektral men-transform persamaan diferensial parsial hingga menjadi persamaan diferensial biasa terhadap waktu. Cara ini menjadi lebih mudah untuk mencari solusi numerik.

Metode spektral menerapkan transform Fourier bagi persamaan diferensial dalam bentuk diskrit. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa dengan pe-nerapan transform Fourier ini penyelesaian persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa akan dicari solusi numerik persamaan tersebut. Solusi persamaan numerik diperoleh dari invers transform Fourier. Metode spektral ini sesuai untuk kasus dengan syarat batas periodik.

VI. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan membahas mengenai penerapan metode spektral pada simulasi aliran fuida 1 dimensi. Metode spektral digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik dengan memanfaatkan teori Fourier, oleh karena itu terlebih dahulu akan dibahas mengenai deret Fourier.

2.1. Deret Fourier

Deret Fourier merupakan hmpiran bagi persamaan periodik. Suatu fungsi $f($ dikatakan fungsi periodik jika terdapat bilangan positif maka berlaku

$$f(x+p) = f(x)$$

dengan merupakan periode dari fungsi . Contoh fungsi periodik yaitu $\sin($ dan $\cos($ dengan periode .

Pada selang $[0;$], fungsi kompleks u) yang periodik dapat dinyatakan dalam deret Fourier

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{2\pi x}{L}}$$

kedua ruas dikalikan dengan e^{-in} lalu diintegralkan, sehingga diperoleh $u(x)\,e^{i(n-m)}$

$$\int_0^L u(x)\,e^{-in\frac{2\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^L u(x) e^{i(n-m)\frac{2\pi x}{L}}\,dx$$

Perhatikan bahwa ortogonalitas dalam ruang hasil kali dalam dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{L}\int_0^L e^{i(n-m)\frac{2\pi x}{L}} = \delta_{nm}$$

dengan δ merupakan delta Kronecker dengan nilai

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

maka diperoleh

$$\int_0^L u(x)\, e^{-in\frac{2\pi x}{L}} = a_m L$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_0^L u(x) e^{-in\frac{2\pi x}{L}}$$

Dimulai dengan mengambil sample nilai fungsi $u($ pada selang bagian, tulis $u($ dimana $x_j = j\Delta x,\ j = 0, \ldots, N -$ dengan lebar selang $\Delta x =$ maka menjadi

$$a_n = \frac{1}{\Delta x\, N}\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-in\frac{2\pi j \Delta x}{N\Delta x}} \Delta x$$

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-in\frac{2\pi j}{N}}$$

Bagian yang menarik yaitu koefsien a_n tepat jika kita menghitung $\tilde{u}(x_j)$dengan koefisien tersebut maka kita akan memperoleh kembali nilai di titik grid $u(x_j)$. Oleh karena itu akan dibuktikan bahwa $\tilde{u}(x_j) = u(x_j)$, dengan mensubstitusi a_n pada sehingga diperoleh

$$\tilde{u}(x_j) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{in\frac{2\pi x_j}{L}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_m e^{-in\frac{2\pi j}{N}} e^{in\frac{2\pi j}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_m \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{in2\pi(j-m)}{N}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_m \left(\sum_{n=0}^{N-1} \rho^n\right)$$

dengan $\rho = e^{\frac{in2\pi(j-}{N}}$

Perhatikan

- untuk $j \neq$ maka $\rho \neq$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \rho^n = \frac{1-\rho^N}{1-\rho}$$

karena

$$\rho^N = e^{\frac{in2\pi(j-m)}{N}} N = \cos 2\pi(j-m) + \sin 2\pi(j-m) = 1$$

maka

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \rho^n\right) = 0$$

- untuk $j =$

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \rho^n\right) = N$$

maka dapat ditulis

$$\tilde{u}(x_j) = \frac{1}{N} u(x_j) N$$

$$\tilde{u}(x_j) = u(x_j)$$

Pada bagian ini transformasi disebut DFT dan disebut invers DFT (IDFT).

Kemudian akan dibahas mengenai Fast Fourier Transform (FFT). FFT meru-pakan prosedur numerik untuk mempercepat perhitungan DFT dengan memilih $N = 2^l$ dengan $l \in N$. Pada Matlab perhitungan FFT dapat dilakukan dengan menggunakan perintah $f\,f\,t$ dan invers FFT dengan menggunakan perintah $if\,f$ t.

VII. ANALISIS METODE SPEKTRAL

Metode Spektral adalah salah satu metode yang digunakan dalam menye-lesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik. Metode spektral meman-faatkan teori transform Fourier dengan $u(x,$ menyatakan ekspansi fungsi ekspo-nensial terhadap variabel .

Perhatikan persamaan Burger sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dengan v merupakan konstanta difusi.

Persamaan Burger akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode spektral. Pilih domain $0 < x < 2$ yang akan dipartisi sebanyak N titik. Pada Matlab dapat dilakukan dengan perintah $x = 2 * \pi * [0 : N - 1]/N$ Perluasan fungsi $u(x,t)$ dengan memanfaatkan deret Fourier yaitu

$$u(x_j, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}-1}^{N-1} \widehat{u_k}(t)\, e^{ikx}$$

dengan $x_j = \frac{2\pi j}{N}$ untuk $j = 0,1, \ldots, N$, $i = \sqrt{-1}$. Untuk bilangan k pada interval $(-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x)$ dengan titik-titik gridnya $k_1 = -\frac{\pi}{\Delta x}, \ldots, k_N = \frac{\pi}{\Delta x}$ dengan $j = 1 \ldots N$. Lebar selang partisi $\Delta k = \frac{2\pi}{N\Delta x}$ dengan N merupakan banyaknya titik partisi. Untuk $N > 2$, nilai k adalah

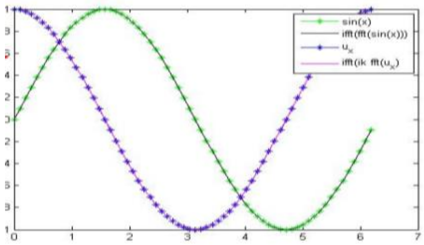
$$k_j = \begin{cases} j\Delta k, & 0 \le j \le {}^{N}/_{2} \\ (j - N)\Delta k, & {}^{N}/_{2} + 1 \le j \le N \end{cases}$$

Untuk N banyaknya selang bagian, k berbentuk $k = [0, 1, \dots, \frac{N}{2}, -\left(\frac{N}{2} - 1\right), \dots, -2, -1]\Delta k$. Di matlab nilai k dapat diperoleh dengan menggunakan perintah $k = [0 : \frac{N}{2}\left(1 - \frac{N}{2}\right) : 1]$.

Koefisien Fourier $\widehat{u_k}$ dapat dicari secara numerik dengan menggunakan Fast Fourier Transform. Nilai u_x pada titik-titik grid x_j adalah

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_j} = \sum_{k=-\frac{N}{2}-1}^{N-1} ik\widehat{u_k}(t)\, e^{ikx}$$

Untuk menguji kebenaran perintah fft dan $ifft$ maka akan diilustrasikan pada fungsi trigonometri. Misalkan fungsi $u(x) = sin(x)$ dengan $-L \le x \le L$. Dengan menggunakan perintah fft, ubah u kedalam ruang Fourier menjadi $\hat{u} = fft(u)$. Selanjutnya hitung u_x pada ruang Fourier, kalikan $\hat{u}$ dengan ik dimana $i = \sqrt{-1}$. Dari perintah ini diperoleh $\widehat{u_x} = ik\hat{u}$. Ubah kembali nilai turunan ini keruang fisis dengan perintah $u_x = real(ifft(\widehat{u_x}))$. Maka diperoleh hasil ilustrasi sebagai berikut



Hasil perbandingan antara kurva u_x dengan $ifft(fft(u))$ menunjukkan bahwa prosedur $ifft$ dan fft berjalan dengan baik.

Hampiran bagi persamaan Linier $u_t = \nu u_{xx}$

Berikut ini akan didiskusikan hampiran bagi persamaan Burger. Dimulai dengan yang paling sederhana yaitu menyelesaikan persamaan difusi $u_t = \nu u_{xx}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

selanjutnya terapkan transform Fourier

$$\frac{du_k}{dt} = -\nu k^2 \widehat{u_x}$$

Persamaan diatas akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Crank Nicolson

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\Delta t} = -\nu k^2 \frac{\hat{u}_k^{n+1} + \hat{u}_k^n}{2}$$

$$\hat{u}_k^{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t \nu k^2}{2}\right) = \hat{u}_k^n\left(1 - \frac{\Delta t \nu k^2}{2}\right)$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n \frac{2 - \Delta t \nu k^2}{2 + \Delta t \nu k^2}$$

selanjutnya persamaan diatas akan digunakan untuk perhitungan numerik.

Kestabilan

Pada bagian ini akan dicek kesatabilan persaman difusi dengan menggunakan metode von Neumann. Misalakan $\hat{u}_k^n = \rho^n e^{iak}$, substitusi kepersamaan numerik sehingga diperoleh

$$\rho^{n+1} e^{iak} = \rho^n e^{iak} \frac{2 - \Delta t \nu k^2}{2 + \Delta t \nu k^2}$$

$$\rho = \frac{2 - \Delta t \nu k^2}{2 + \Delta t \nu k^2}$$

Syarat persamaan beda stabil jika dan hanya jika $|\rho| \le 1$. Perhatikan bahwa dapat dilihat bahwa $|\rho| \le 1$ dipenuhi untuk setiap $\Delta t \nu k^2 \ge 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa skema numerik stabil tanpa syarat.

Simulasi

Pada simulasi ini akan ditunjukkan bahwa solusi numerik dengan menggunakan persamaan beda. Diberikan syarat awal $u(x, 0) = sin\ x$ dengan $\nu = 0.01$. Solusi akan dihitung dengan memplot u untuk beberapa waktu berurutan.

Pada gambar diatas, bagian (a) menunjukkan gelombang sinusoidal pada waktu $t = 0$ yang merupakan syarat awal $u(x, t)$. Pada waktu berikutnya ditunjukkan oleh bagian (b), (c), (d). Pada simulasi tampak adanya efek damping. Hal ini sesuai dengan yang diharapkan karena persamaan yang diselesaikan merupakan persamaan difusi.

Hampiran bagi $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$

Setelah menyelesaikan bagian linier, sekarang akan diselesaikan persamaan dengan menambahkan bagian tak linier yang berarti menyelesaikan persamaan Burger. Transform Fourier persamaan Burger

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = -\widehat{\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_k - \nu k^2 \hat{u}_k$$

Berikut langkah-langkah yang akan digunakan untuk menghitung suku tak linier

- Hitung transform fourier $\hat{u}$ dengan menggunakan perintah fft
- Hitung $\hat{u}_x$ dengan cara $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_k = ik\hat{u}_k$
- Ubah $\hat{u}$ dan $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ keruang fisis dengan menggunakan perintah $ifft$
- Kalikan u dengan $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan kembalikan keruang Fourier dengan menggunakan perintah fft

Akan diselesaikan persamaan Burger dengan menggunakan metode Crack Nicolson

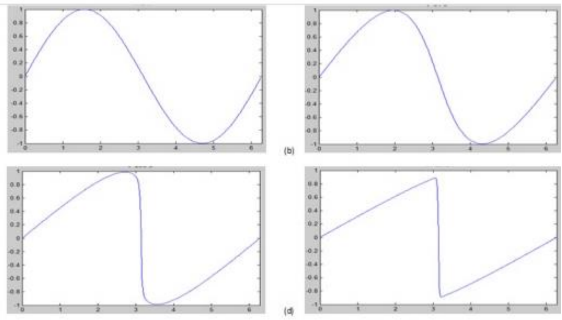
$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(3\left(\widehat{u\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_k^n - \left(\widehat{u\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_k^{n-1}\right) - \nu k^2 \frac{\hat{u}_k^{n+1} + \hat{u}_k^n}{2}$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \frac{(2 - \Delta t \nu k^2)\hat{u}_k^n - \Delta t\left(3\left(\widehat{u\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_k^n - \left(\widehat{u\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_k^{n-1}\right)}{2 + \Delta t \nu k^2}$$

Selanjutnya persamaan ini akan digunakan untuk perhitungan numerik persamaan Burger.

Simulasi

Pada simulasi ini akan ditunjukkan solusi numerik persamaan Bu8rger dengan menggunakan persamaan beda. Diberikan syarat awal $u(x,0) = sin\ x$. Misalkan $\nu = 0.01$ $N = 256$. Perubahan $u(x,t)$ dari ruang Fourier ke ruang fisis menggunakan perintah fft. Hasil simulasi untuk $\Delta t = 0.005$ ditunjukkan oleh gambar berikut



Simulasi pada gambar (a) menunjukkan gelombang sinusoidal pada waktu $t = 0$ yang merupakan syarat awal $u(x,t)$. Pada waktu selanjutnya ditunjukkan oleh bagian (b), (c), (d) muka gelombang semakin lama semakin curam, hal ini disebabkan efek suku tak linier

VIII. KESIMPULAN

Penerapan metode spektral dengan ekspansi deret Fourier dapat dilakukan pada aliran fluida satu dimensi yaitu persamaan Burger. Penerapan metode spektral ini dapat menghasilkan simulasi yang menunjukkan keadaan *steady*suatu fluida dan simulasi menunjukkan aliran fluida dengan turbulensi.

Hasil analisa kestabilan linier menunjukkan kebergantungan antara kestabilan solusi ekuilibrium dengan suatu parameter.

REFERENSI

[7] Cusman-Roisin, Bendit and Jean-Marie Becker, Introduction to Geophysical Fluid Dinamics Physical and Numerical Aspects, Academic Press, 2011

[8] Kreyzig,Erwin, Advanced Engineeringt Mathematics, Singnapura : jhon Willey and Sons Inc, 2006

[9] Peyret, Roger, Spectral Method for Incompressible Viscous Flow, Springer, Science,+Bussiness Media, 2002

[10] Pudjaprasetya, Sri Redjeki, Catatan Ma5271 Persamaan Diferensial Parsial, Institut Teknologi Bandung, 2013

[11] Spiegel, Murray R, Schaum's Outline of Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, United State of America, 1959